



Congreso Nacional de ingeniería Mecánica, Castellón 2012

**Estimación de error
en elementos finitos
mediante técnicas de 'recovery'**

Javier Fuenmayor

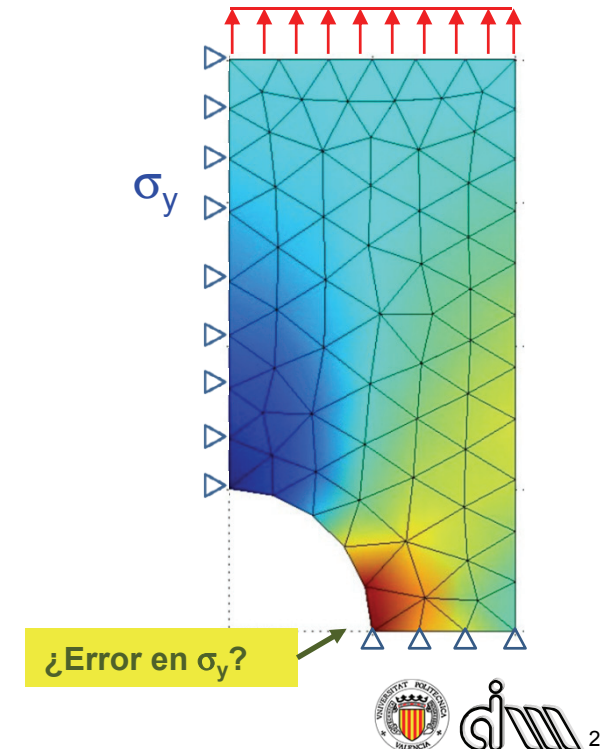
**Dpto. Ingeniería Mecánica y de Materiales
Universitat Politècnica de València**



Motivación

Elementos finitos

- **Herramienta numérica de gran aplicación en Ingeniería**
- **Software disponible muy elaborado**
 - Preproceso (CAD, generación automática de mallas, ..)
 - Procesado, incluyendo posibles complejidades del problema (geometría, materiales, tipos de análisis, ..)
 - Postproceso con facilidades para interpretación de resultados
- **Método numérico → Solución aproximada**
 - Error de discretización inherente al método
- **Objetivos**
 - Estimación de error de discretización
 - Automatización de análisis
 - Mejora de confiabilidad en resultados



Contenido

- 1. Introducción**
- 2. Estimación de error de discretización**
- 3. Problemas de contacto**
- 4. Problemas singulares**
- 5. Estimación de error en magnitudes de interés**

1. Introducción

1.1 Problema elástico

- **Formulación MEF**

Discretización: $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega_e, \quad \Omega_k \cap \Omega_l = \emptyset \quad k \neq l$

Interpolación: $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{u}^e, \quad \mathbf{u}^h \in C^0(\Omega)$

Espacios funcionales: $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}, \quad \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$

- **Formulación débil: P.T.V.**

Encontrar $\mathbf{u}^h \in \mathcal{U}^h(\Omega)$ tal que, para todo $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h(\Omega)$

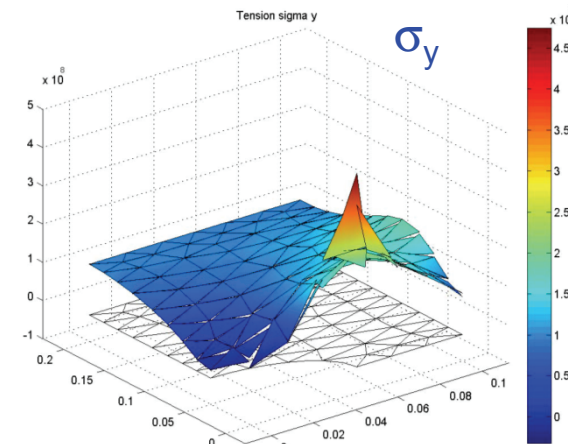
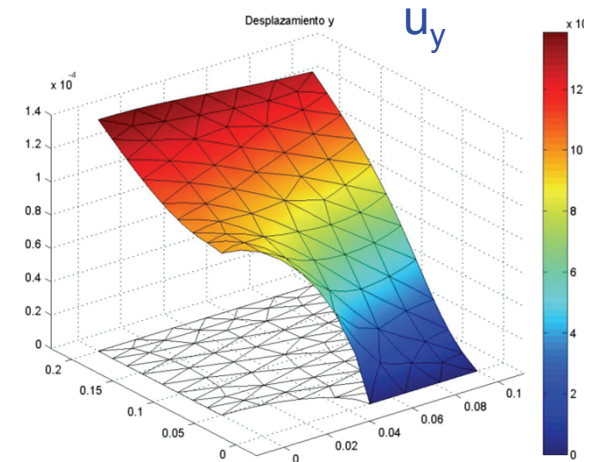
$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h)^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}^h) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^h{}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^h{}^T \mathbf{t} d\Gamma$$

F. vol F. sup

- **Solución no exacta**

– Equilibrio $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^h + \mathbf{b} \neq 0 & \text{en } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}^h \cdot \mathbf{n} \neq \mathbf{t} & \text{en } \Gamma_N \end{cases}$

– Discontinuidad de tensiones entre elementos



1. Introducción

1.2 Error de discretización, convergencia, h -adaptatividad

- **Error de discretización y convergencia (refinamiento h)**

– Error de discretización $\mathbf{e}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^h(\mathbf{x})$

– Norma energética $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega$

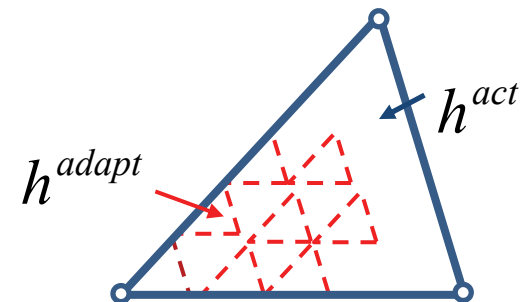
– Norma energética del error $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) \, d\Omega$

– Error relativo: $\eta_{E(\Omega)} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}}{\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)}}$

- **Ley de convergencia $\rightarrow h$ - adaptatividad**

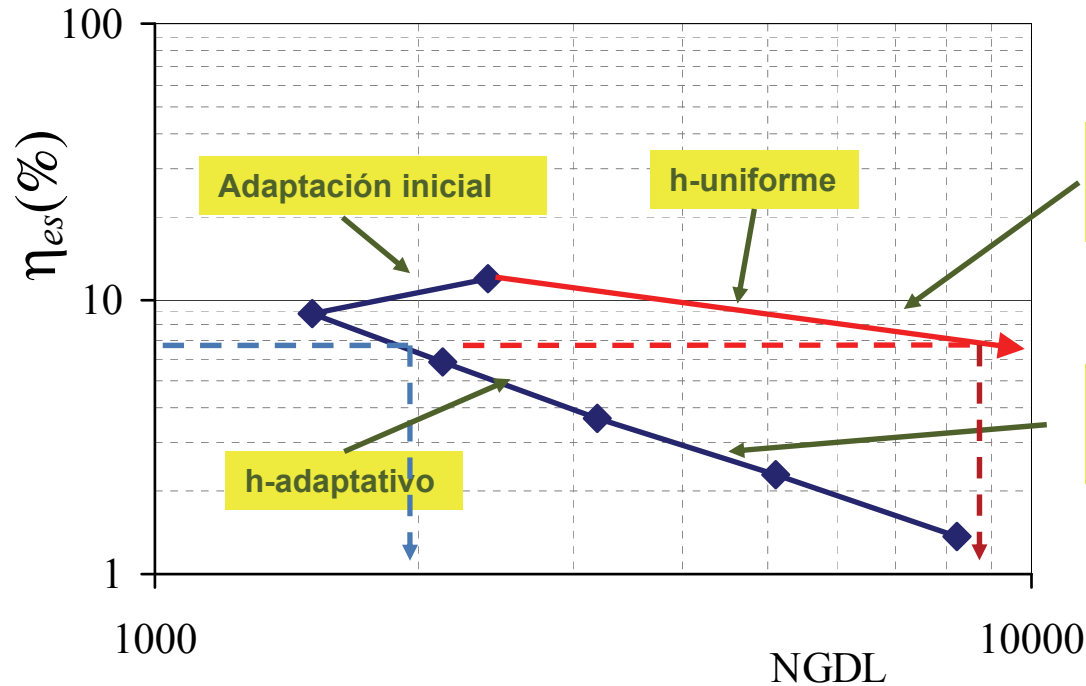
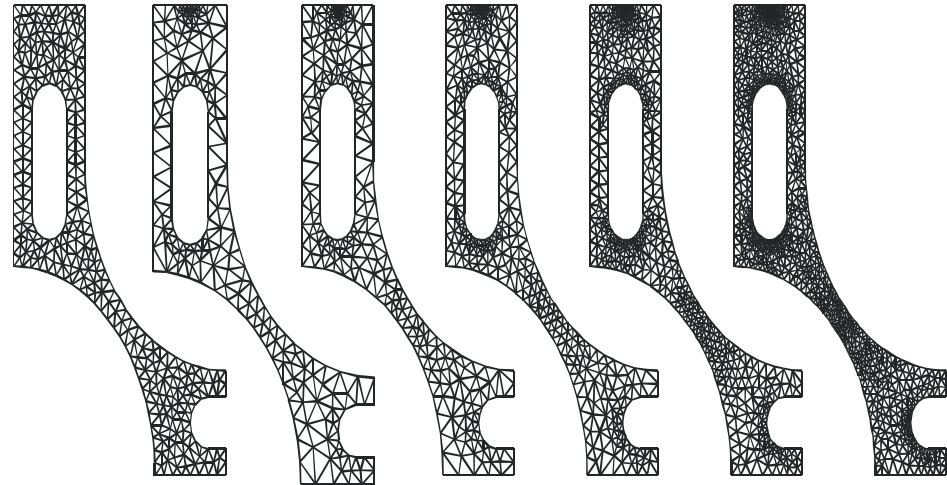
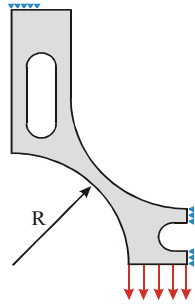
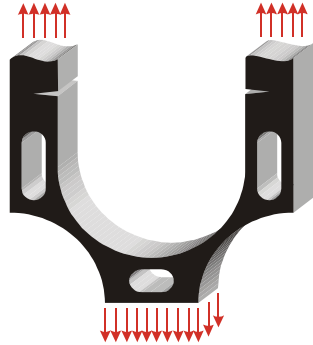
$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)} \leq C h^c \quad c = \min(p, \lambda)$$

Grado polinómico \uparrow \uparrow Singularidad



1. Introducción

- h*-adaptatividad**



$$\|e\|_{E(\Omega)} \leq C_N N^{-\lambda}$$

$$\|e\|_{E(\Omega)} \leq C_N N^{-p}$$

Dimensión problema

NGDL

[1] J.F. Fuenmayor and J.L. Oliver, "Criteria to achieve nearly optimal meshes in the *h*-adaptive finite element method" *IJNME* 1996, 39(23): 4039-4061.

2. Estimación de error de discretización

2.1 Estimadores “a posteriori”

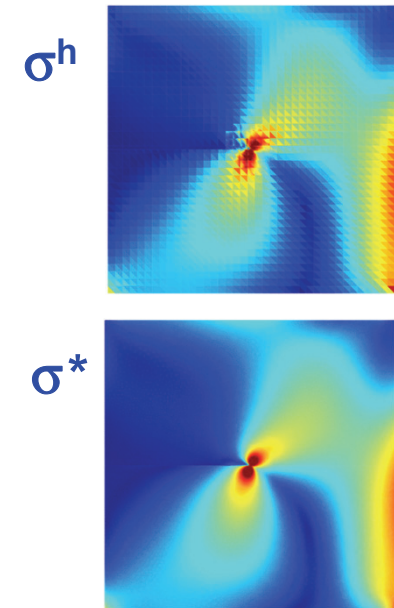
- **Técnicas de recovery**

- Basados en obtener una solución mejorada a partir de la solución de elementos finitos (en general tensiones)

$$\|e\|_{E(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega \quad \rightarrow \quad \|e_{es}\|_{E(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega$$

- **Técnicas de construcción de $\boldsymbol{\sigma}^*$**

- Utilización de técnicas de mínimos cuadrados [1]
- ...
- SPR (**S**uperconvergent **P**atch **R**ecovery) [2]
 - Técnica muy utilizada en la actualidad
 - Buena precisión del estimador
 - Coste computacional razonable



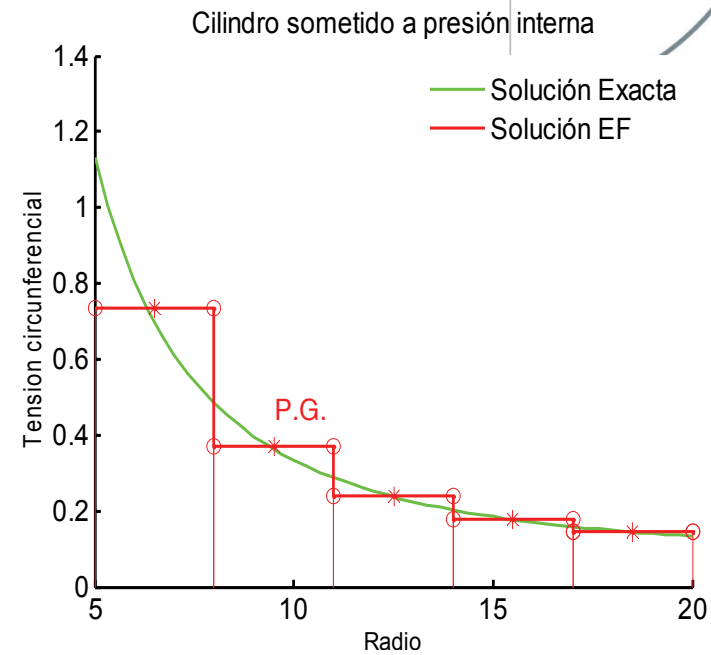
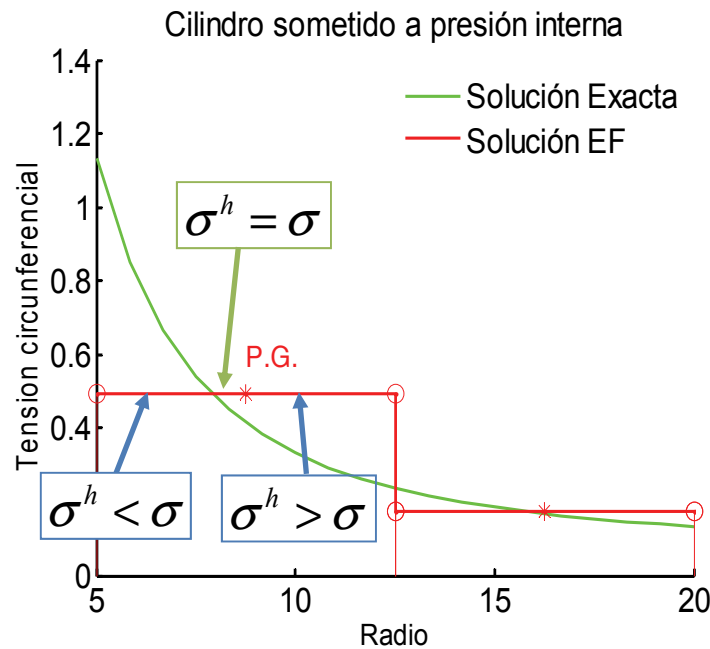
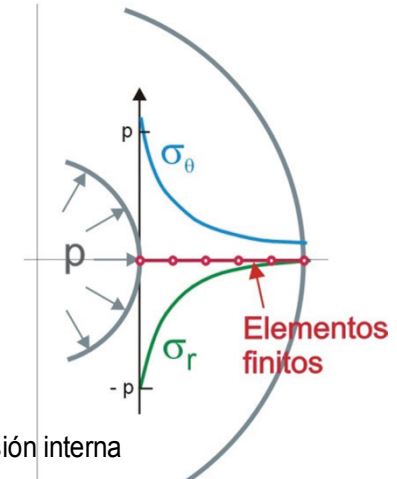
[1] E. Hinton and J. Campbell, "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions using a Least Squares Method", *IJNME* 1974; **8**:461-480.

[2] O. Zienkiewicz and J. Zhu, "The Superconvergent Patch Recovery and a-posteriori Error Estimates. Part 1; The Recovery Technique", *IJNME* 1992, **8**:1331-1364.

2. Estimación de error de discretización

2.2 Estimador de Zienkiewick - Zhu. Técnica SPR

- **Técnica SPR de construcción de σ^***
 - Ejemplo 1D – Cilindro a presión interna
 - Elementos lineales
 - Tensiones constantes en elemento

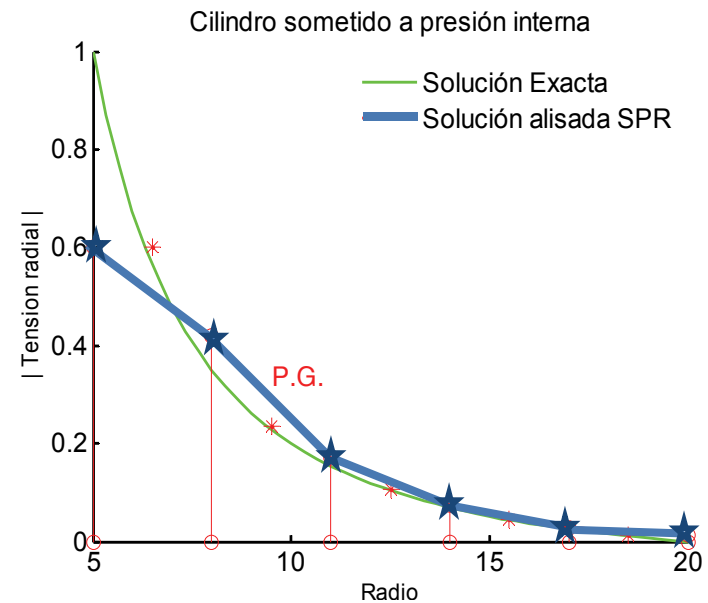
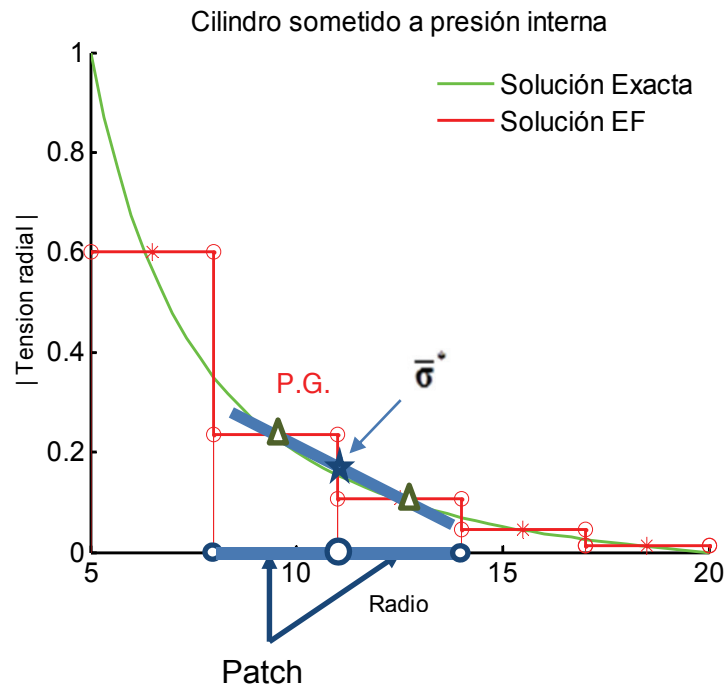


Precisión de tensiones en puntos de integración de Gauss

2. Estimación de error de discretización

2.2 Estimador de Zienkiewick - Zhu. Técnica SPR

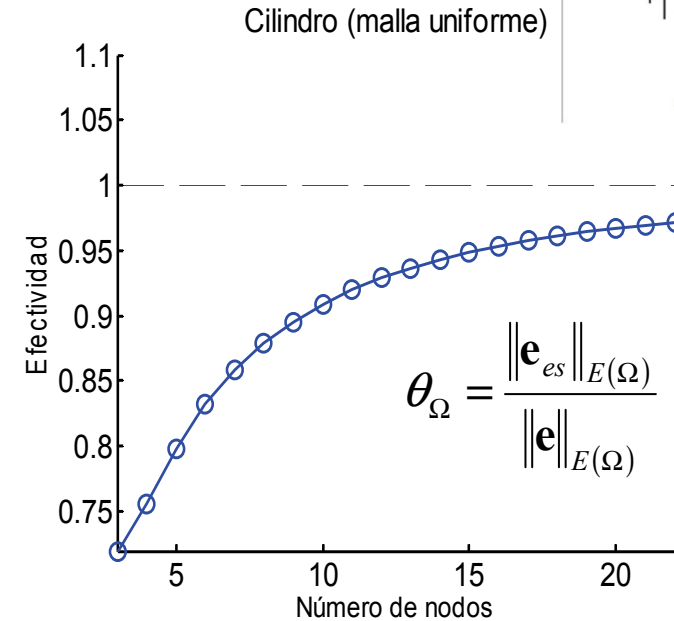
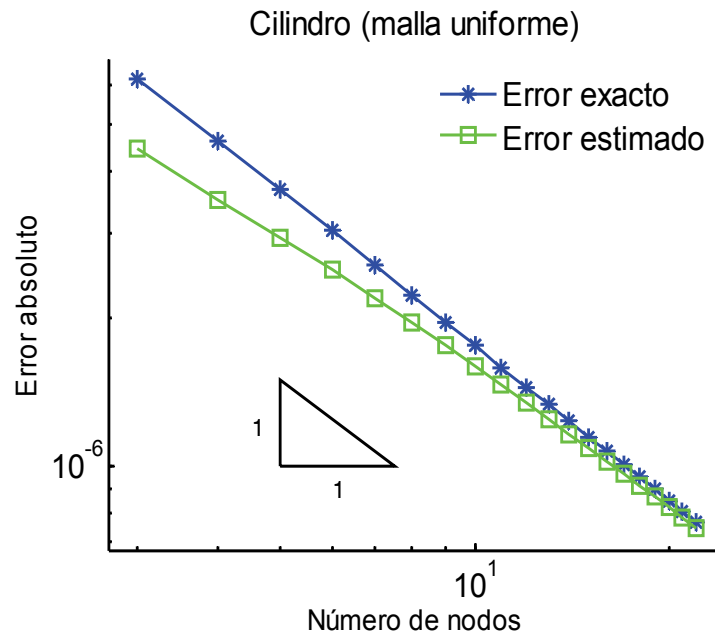
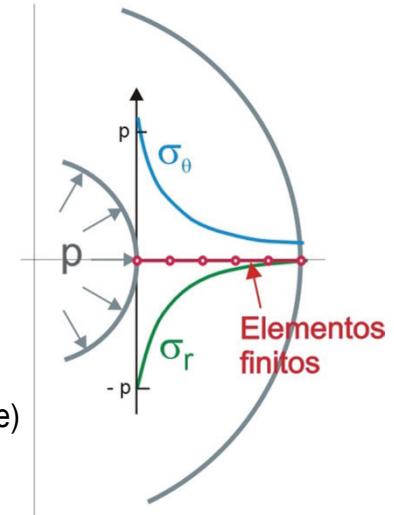
- **Técnica SPR de construcción de σ^***
 - Patch: elementos conectados a un nodo
 - Ajuste de polinomio a partir de tensiones en PG en Patch
 - Obtención del valor nodal $\bar{\sigma}^*$
 - Interpolación a partir de valores nodales



2. Estimación de error de discretización

2.2 Estimador de Zienkiewick - Zhu. Técnica SPR

- Técnica SPR de construcción de σ^*
 - Resultados estimación de error



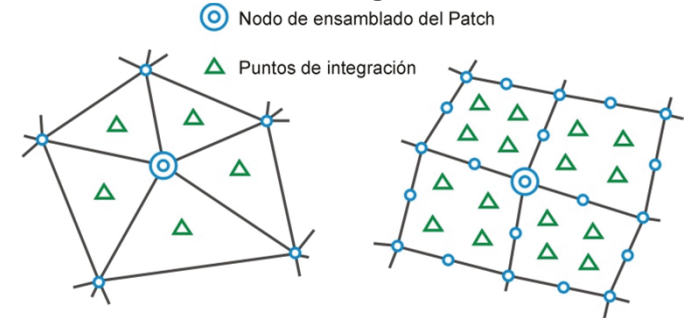
2. Estimación de error de discretización

2.2 Estimador de Zienkiewick - Zhu. Técnica SPR

- **Técnica SPR de construcción de σ^* para problemas 2D y 3D**

- Patch asociado al nodo k
- Polinomio de ajuste:

$$\sigma^{P_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} \mathbf{a}^{P_k} = a_0^{P_k} + a_1^{P_k} x + a_2^{P_k} y + a_3^{P_k} xy + \dots$$



- Ajuste de polinomio a partir de tensiones en PG en Patch (mínimos cuadrados)

$$E^{P_k}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{G_k} (\sigma^h(\mathbf{x}_i) - \sigma^{P_k}(\mathbf{x}_i))^2 = \sum_{i=1}^{G_k} (\sigma^h(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}^{P_k})^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{m}^{P_k} \mathbf{a}^{P_k} = \mathbf{b}^{P_k}$$

$$\mathbf{m}^{P_k} = \sum_{i=1}^{G_k} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) ; \quad \mathbf{b}^{P_k} = \sum_{i=1}^{G_k} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \sigma^h(\mathbf{x}_i)$$

- Obtención del valor nodal $\bar{\sigma}^*$

- Interpolación a partir de valores nodales

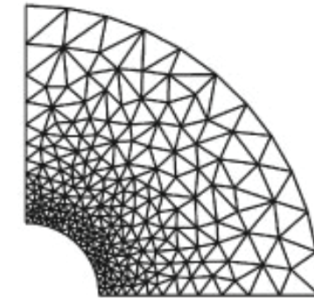
$$\sigma^*(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \bar{\sigma}^*$$

2. Estimación de error de discretización

2.3 Mejora de la técnica SPR

- **Problemas de estimación en contorno [1]**

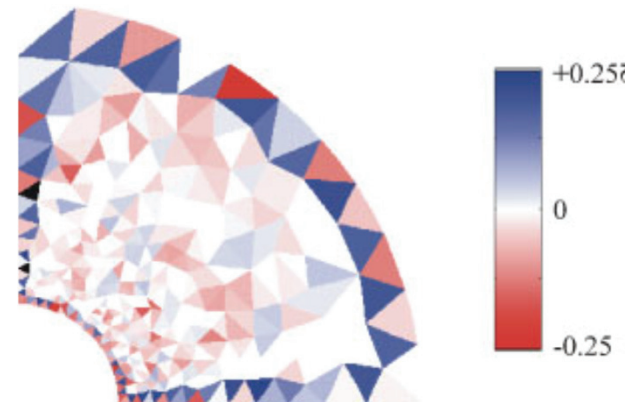
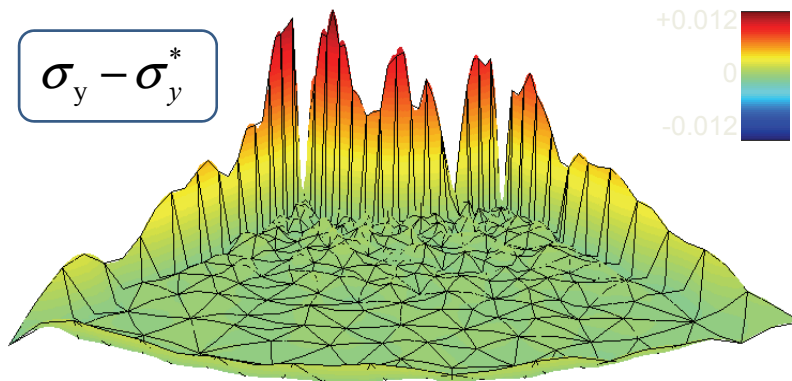
- Campo mejorado en contorno poco preciso (Patch con número reducido de elementos)
- Ejemplo: modelo 2D de cilindro sometido a presión interna(1/4)



Desviación
efectividad

D_e

$$\left| \begin{array}{ll} D_e = \theta_{\Omega_e} - 1 & \text{si } \theta_{\Omega_e} \geq 1 \\ D_e = 1 - \frac{1}{\theta_{\Omega_e}} & \text{si } \theta_{\Omega_e} \leq 1 \end{array} \right.$$



[1] J. Ródenas, M. Tur, F. Fuenmayor and A. Vercher, "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique", *IJNME* 2007, **70**: 705-727.

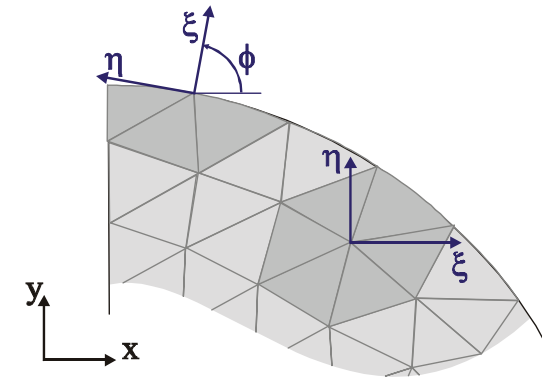
2. Estimación de error de discretización

2.3 Mejora de la técnica SPR [1]

- **Incorporación de condiciones de contorno**

- Sistema de coordenadas en patch de contorno

- Ecuaciones de restricción en ajuste: $\mathbf{R}_C^{P_k}(\mathbf{A}^{P_k}) = \mathbf{0}$



- **Incorporación de equilibrio interno**

- Ecuaciones de equilibrio en patch

$$\mathbf{R}_I^{P_k}(\mathbf{A}^{P_k}) = \mathbf{0}$$

- **Imposición mediante Lagrange en minimización**

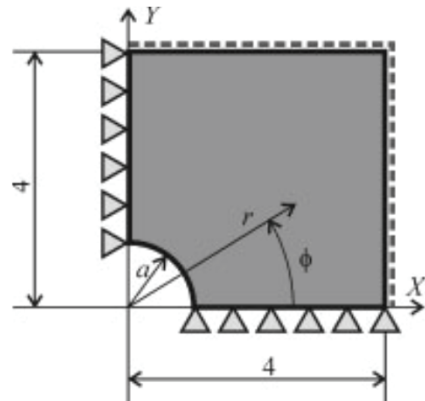
$$E_C^{P_k}(\mathbf{A}) \equiv E^{P_k}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{R}_C^{P_k}(\mathbf{A}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{R}_I^{P_k}(\mathbf{A})$$

[1] J. Ródenas, M. Tur, F. Fuenmayor and A. Vercher, "Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique", *IJNME* 2007, **70**: 705-727.

2. Estimación de error de discretización

2.3 Mejoras de la técnica SPR

- Ejemplo: Placa infinita con agujero circular



Plane strain
 $E = 1000$
 $\nu = 0.3$
 $a = 1$
 $\sigma_\infty = 1$

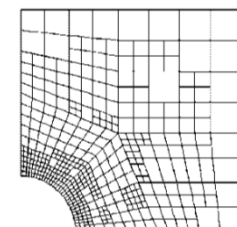
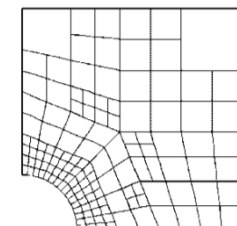
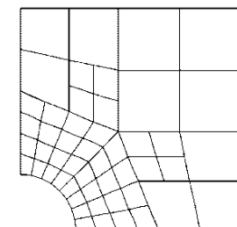
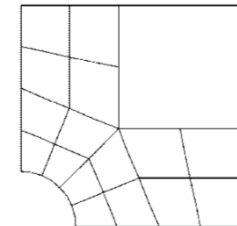
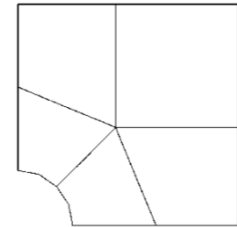
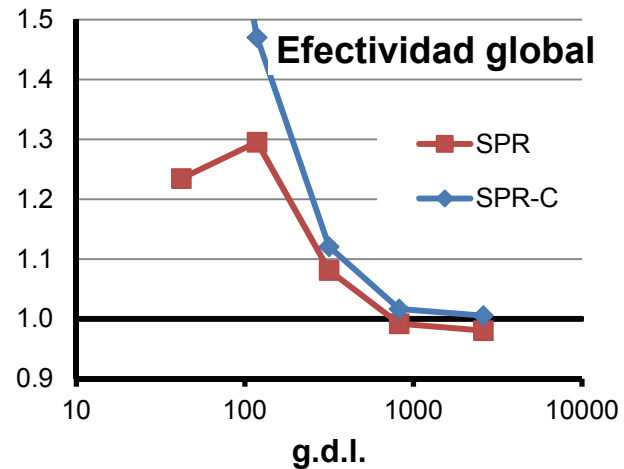
$$\sigma_x = \sigma_\infty \left[1 - \frac{a^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos(2\phi) + \cos(4\phi) \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\phi) \right]$$

$$\sigma_y = \sigma_\infty \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\phi) - \cos(4\phi) \right) - \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \cos(4\phi) \right]$$

$$\tau_{xy} = \sigma_\infty \left[-\frac{a^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\phi) + \sin(4\phi) \right) + \frac{3}{2} \frac{a^4}{r^4} \sin(4\phi) \right]$$

- No mejora la efectividad global

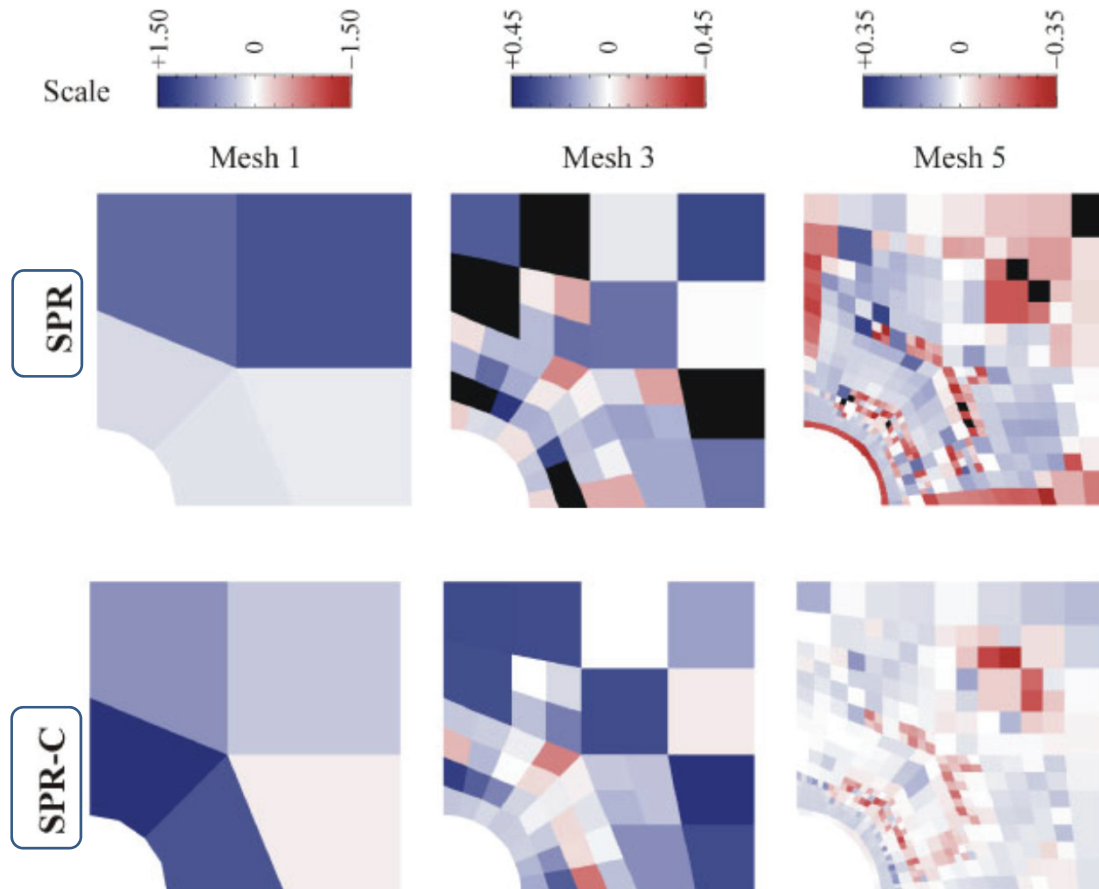
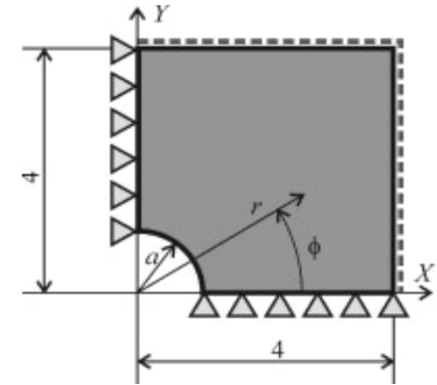
$$\theta_\Omega = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|_{E(\Omega)}}{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega)}}$$



2. Estimación de error de discretización

2.3 Mejora de la técnica SPR

- **Ejemplo: Placa infinita con agujero circular**
 - Mejora la efectividad local



D_e Desviación efectividad

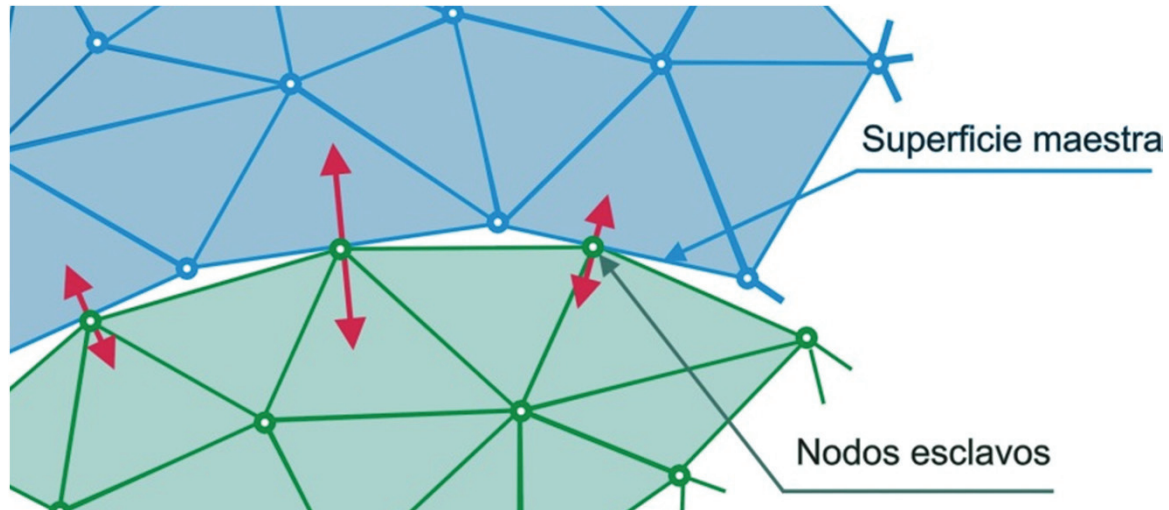
$$\left| \begin{array}{ll} D_e = \theta_{\Omega_e} - 1 & \theta_{\Omega_e} \geq 1 \\ D_e = 1 - \frac{1}{\theta_{\Omega_e}} & \theta_{\Omega_e} \leq 1 \end{array} \right.$$

3. Estimación de error en problemas de contacto

3.1 Modelo de contacto

- **Modelos de contacto**

- Interacción nodo-segmento (1980/1990)
 - Nodos esclavos no penetran en superficie maestra
 - Transmisión de fuerzas puntuales en contacto



- Precisión baja (oscilaciones de tensiones de contacto)
- Pérdida de velocidad de convergencia de la solución

3. Estimación de error en problemas de contacto

3.1 Modelo de contacto

- Interacción segmento-segmento (contacto normal)**

- Aproximación de presión en contacto

$$p_N^h = \sum_{C \in \Gamma_c^{(1)}} M_c p_{NC}$$

← Funciones de forma

- Formulación débil:

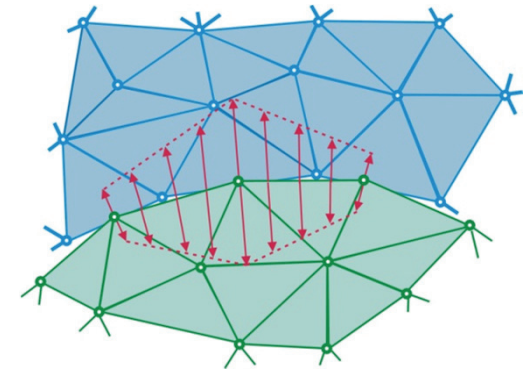
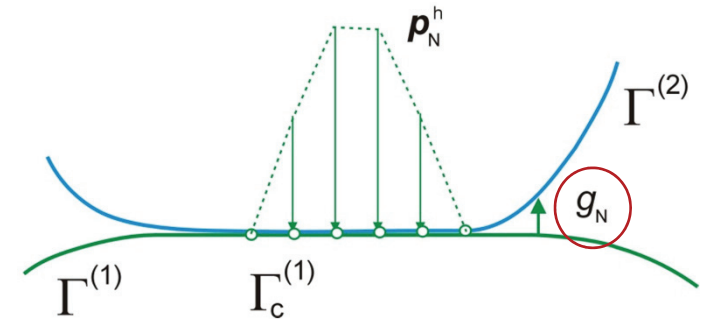
- Trabajo virtual de tensiones de contacto

$$\int_{\Gamma_c^{(1)}} p_N^h \delta g_N^h d\Gamma$$

- Condición de impenetrabilidad

$$\int_{\Gamma_c^{(1)}} \delta p_N^h g_n^h d\Gamma = 0 \quad \forall \delta p_N^h + \dots$$

- Lagrange, Lagrange aumentado, consideración de fricción, ..



[1] B. Yang, T.A. Laursen and X.N. Meng, "Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding", *IJNME* 2005, **62**: 1183-1225.

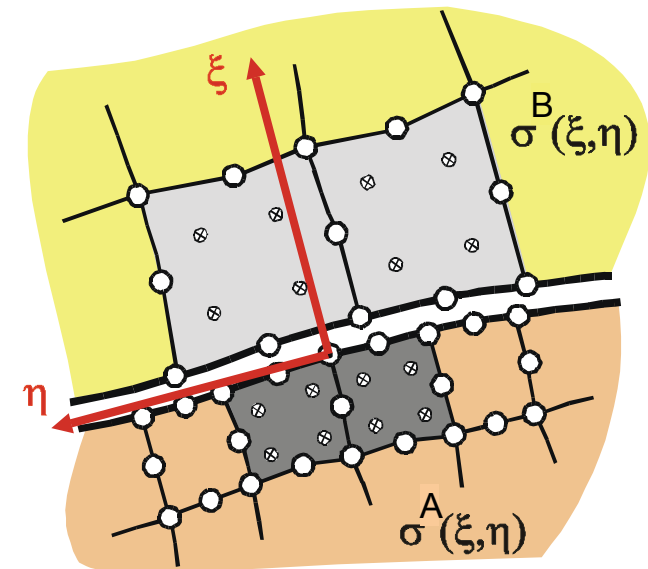
[2] M. Tur, F.J. Fuenmayor, and P. Wriggers, "A mortar-based frictional contact formulation for large deformations using Lagrange multipliers", *CMAME* 2005, **198**: 2860:2873.

[3] M. Tur, E. Giner, F.J. Fuenmayor, and P. Wriggers, "2D contact smooth formulation based on the mortar method", *CMAME* 2012, **247-248**: 1:14

3. Estimación de error en problemas de contacto

3.2 Estimación de error

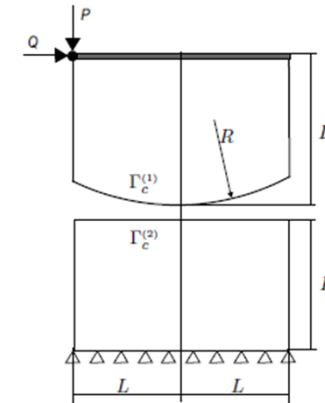
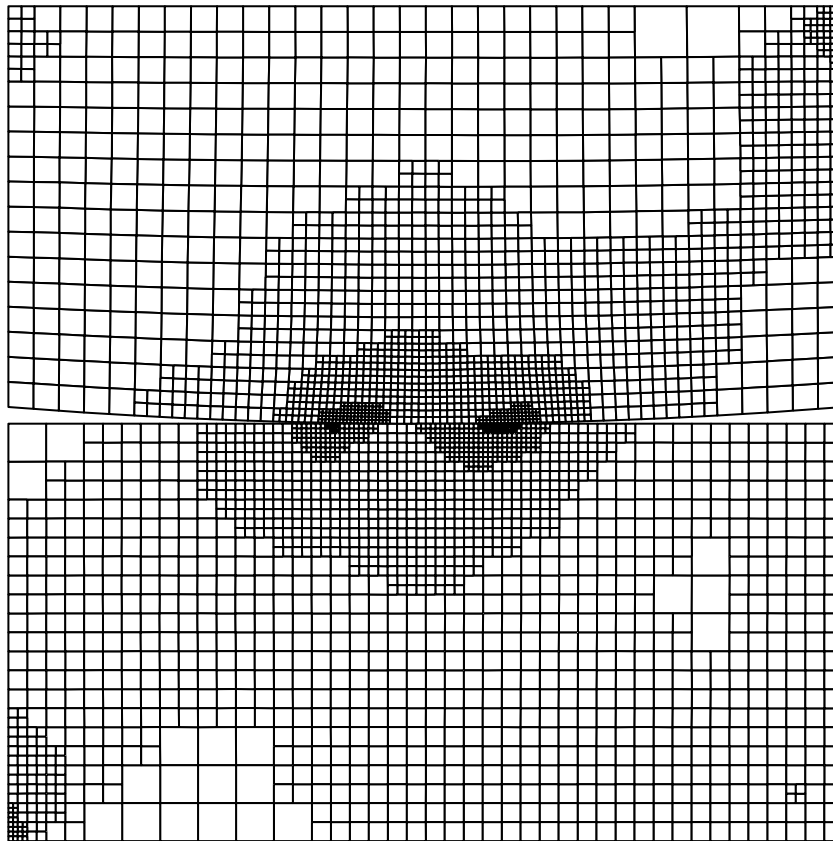
- **Ajuste en patch de superficie de contacto**
 - Patch en nodo de contacto incluye elementos de ambos sólidos
 - Ajuste polinómico para cada cuerpo
 - Definición de ejes locales en el nodo de ensamblado del patch
 - Ajuste considerando:
 - Continuidad de tensiones normales y tangenciales
 - Tensiones tangenciales nulas en contacto sin rozamiento



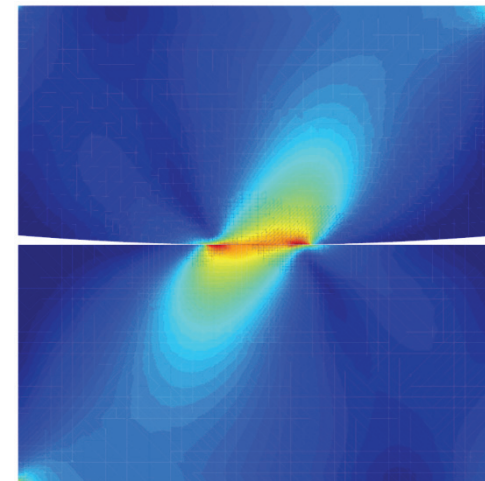
3. Estimación de error en problemas de contacto

3.2 Estimación de error

- Contacto cilíndrico con rozamiento



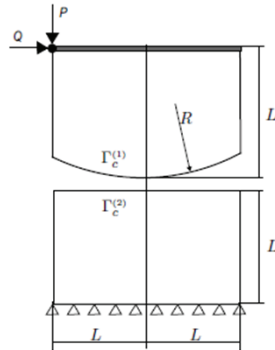
Von Mises



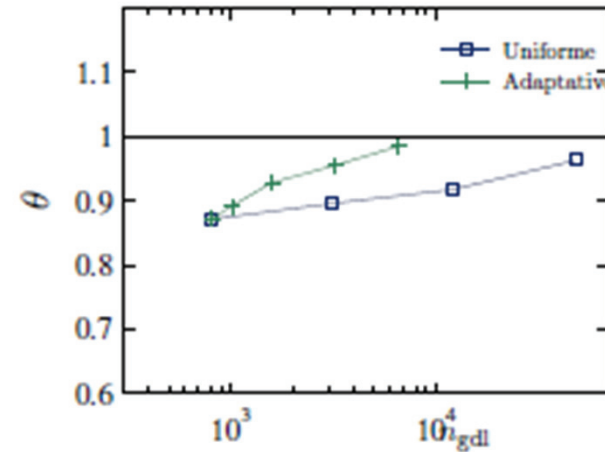
3. Estimación de error en problemas de contacto

3.2 Estimación de error

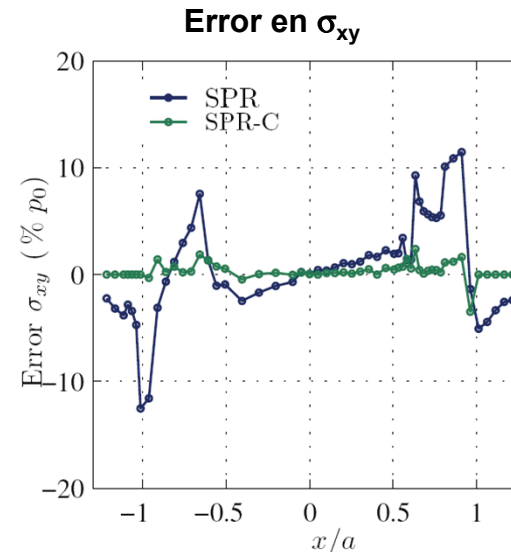
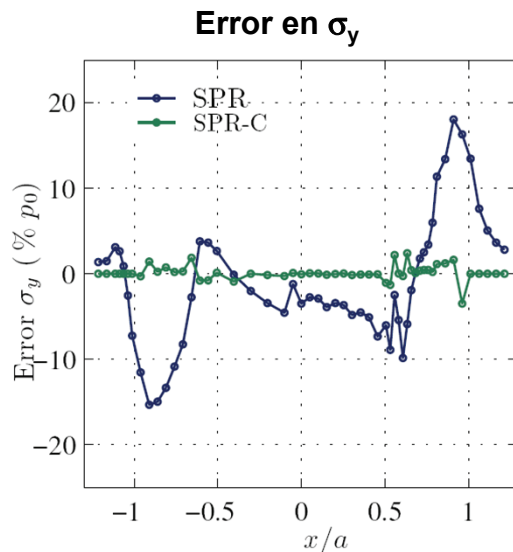
- Contacto cilíndrico con rozamiento



Efectividad θ



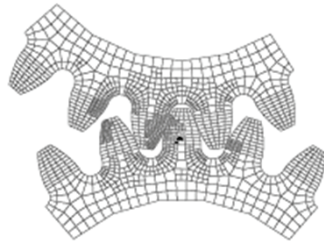
- Mejora de tensiones del algoritmo SPR-C frente al SPR



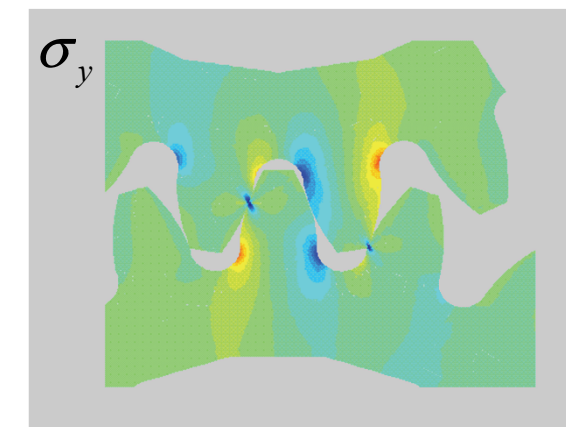
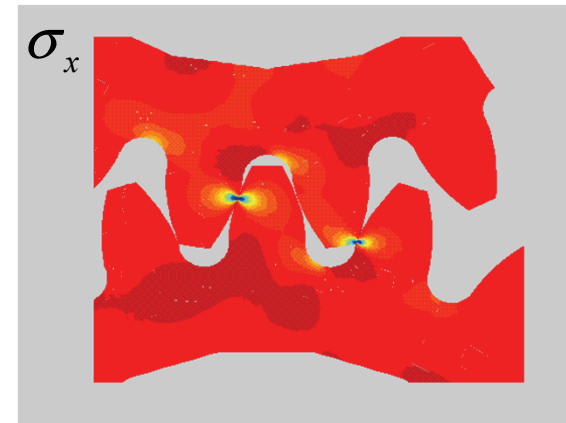
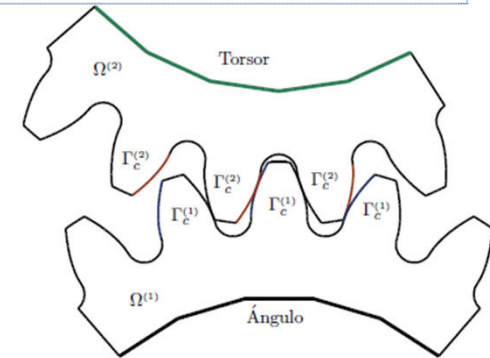
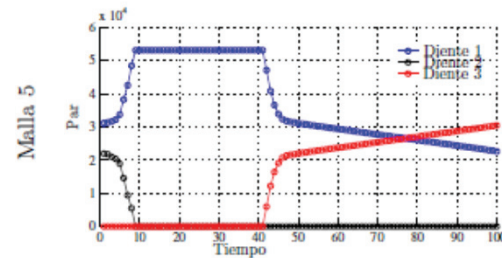
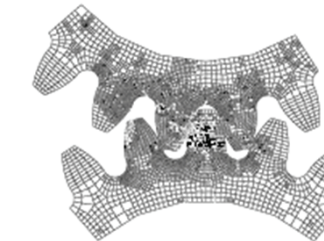
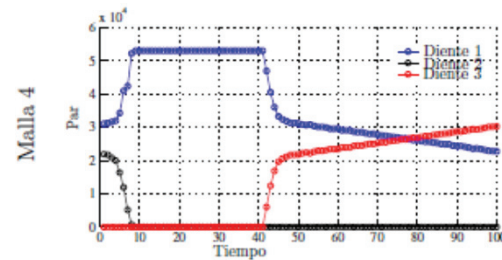
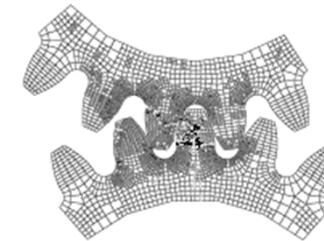
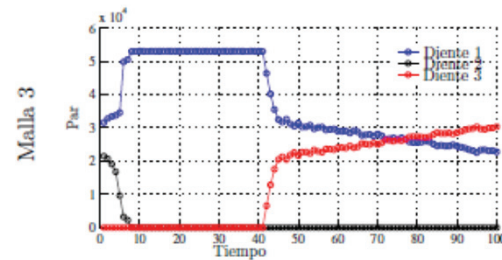
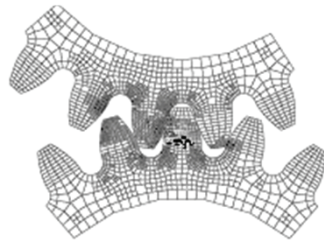
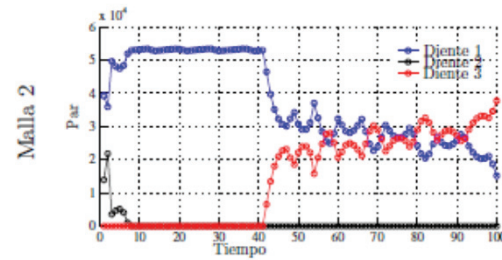
3. Estimación de error en problemas de contacto

3.2 Estimación de error

- Engranajes



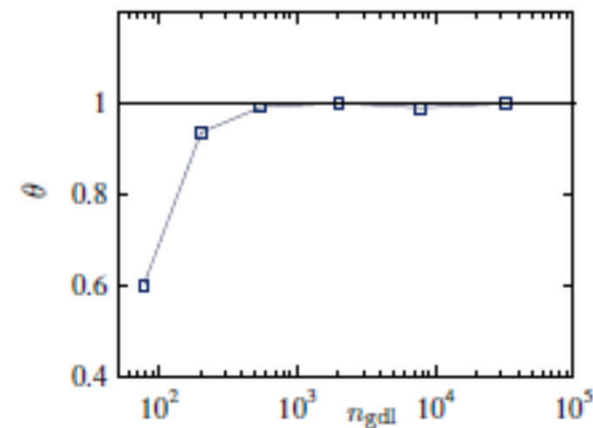
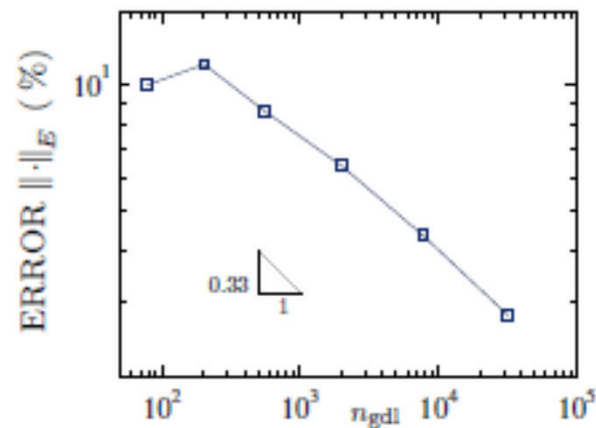
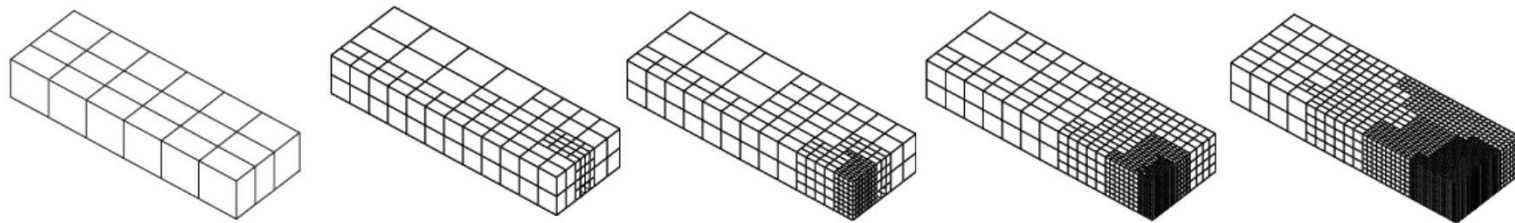
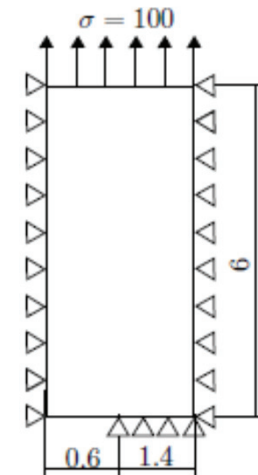
Par transmitido por cada diente:



4. Estimación de error en problemas singulares

4.1 Método XFEM

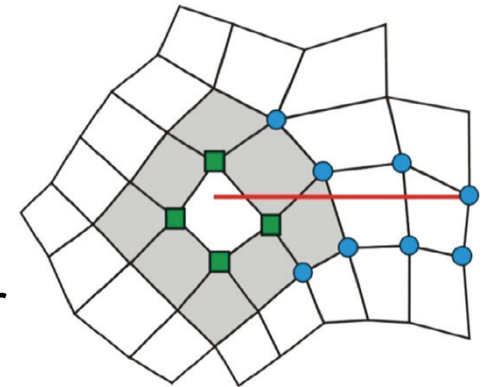
- Problemas con singularidades (grietas, etc.)
- Modelado MEF estándar:
 - La discretización debe representar las caras de grieta
 - Precisión requiere refinamiento importante
 - Simulación costosa de crecimiento de grietas



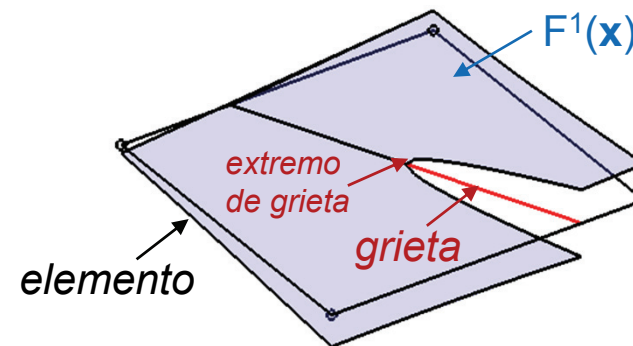
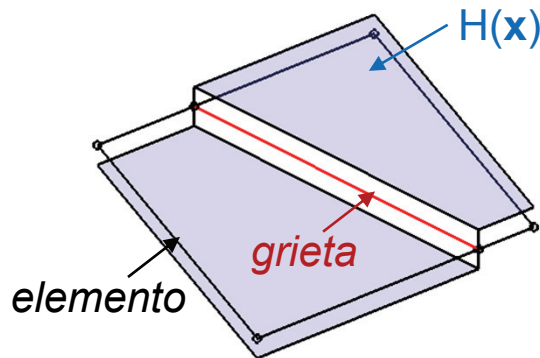
4. Estimación de error en problemas singulares

4.1 Método XFEM

- **Modelado de grieta mediante enriquecimiento**
 - Funciones Heaviside → caras de grieta
 - Funciones que generan el primer término singular



$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i + \sum_{j \in J} N_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j + \sum_{k \in K} N_k^l(\mathbf{x}) \left(\sum_{\alpha=1}^4 F^\alpha(\mathbf{x}) c_k^\alpha \right)$$



$$\{F^\alpha(\mathbf{x})\}_{\alpha=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \quad \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}$$

[1] T. Belytschko and T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *IJNME* 1999, **45**: 601-620.

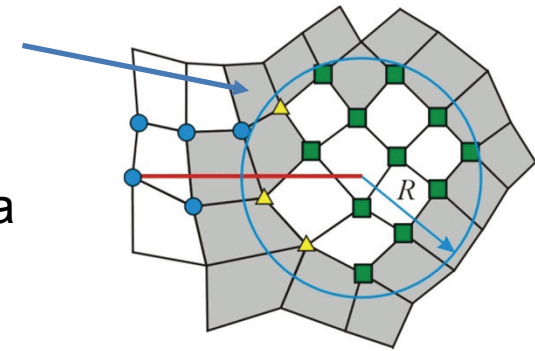
[2] N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing", *IJNME* 1999, **46**: 131-150.

4. Estimación de error en problemas singulares

4.1 Método XFEM

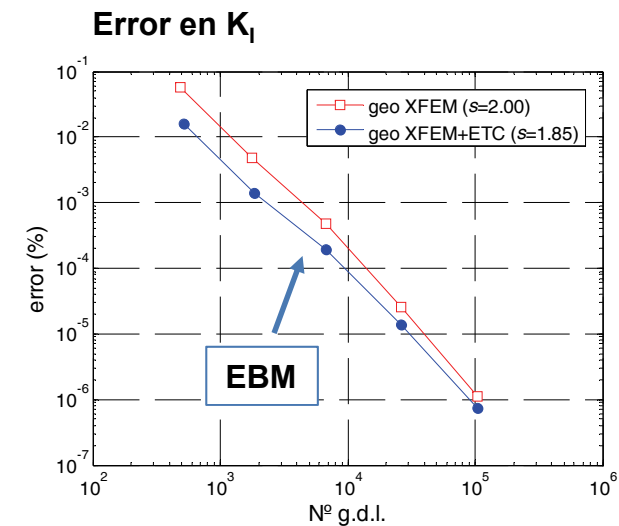
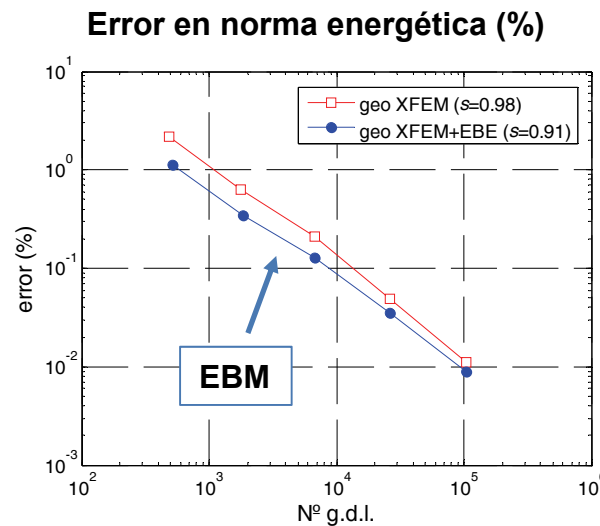
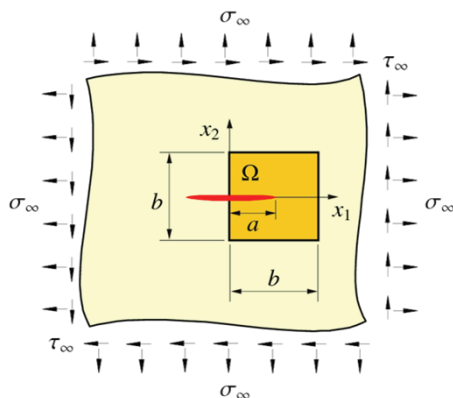
- **Elementos blending**

- Parcialmente enriquecidos, no existe partición de la unidad, disminuyen precisión, ...



- **Mejora de elementos blending [1,2]**

- Ejemplo: Placa infinita con grieta en modo mixto (elementos cuadráticos)



- [1] T.P. Fries. "A corrected XFEM approximation without problems in blending elements". *IJNME* 2007; **75**: 503-532
- [2] J. E. Tarancón, A. Vercher, E. Giner and F. J. Fuenmayor. "Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics". *IJNME* 2009; **77**:126-148

4. Estimación de error en problemas singulares

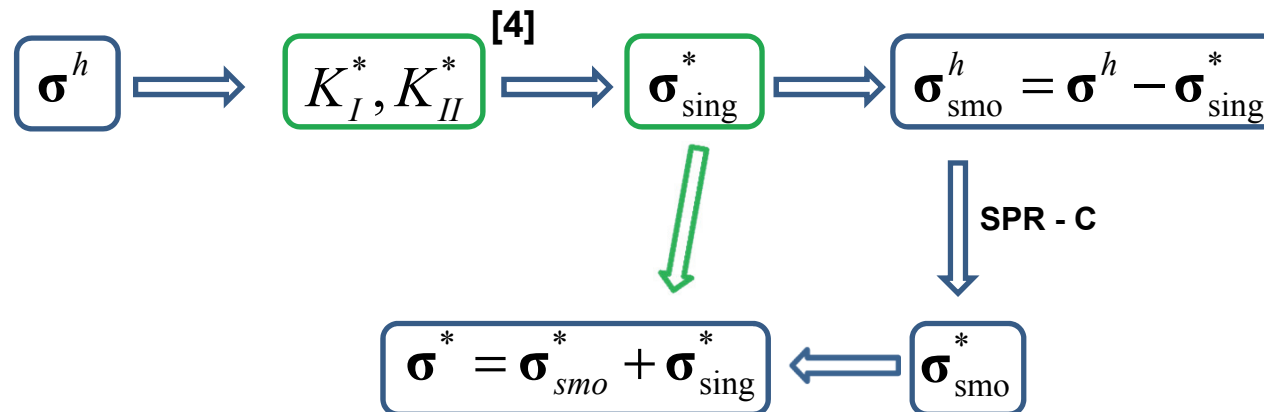
4.2 Estimación de error

- **Técnica SPR no adecuada para problemas singulares**

- Incorporación de términos singulares en SPR [1,2]

- Descomposición solución suave + singular [3]

$$\sigma = \sigma_{smo} + \sigma_{sing}$$



[1] S. Bordas, M. Duflot and P.A. Le. "A simple error estimator for extended finite elements". *CNME 2008*; **24**:961-971.

[2] M. Duflot and S. Bordas. "A posteriori error estimation for extended finite element by an extended global recovery". *IJNME 2008*; **76**:1123-1138.

[3] J.J. Ródenas, O.A. González-Estrada, J.E. Tarancón and F.J. Fuenmayor. "A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular+smooth stress field splitting". *IJNME 2008*; **76**:545-571.

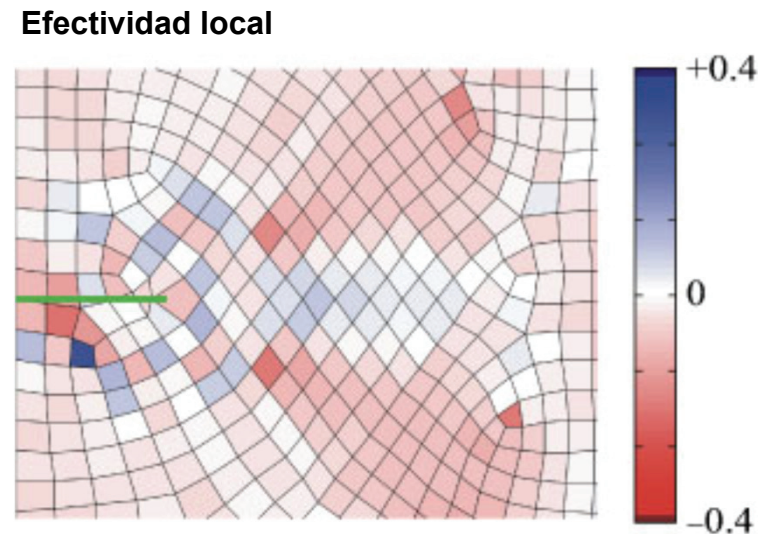
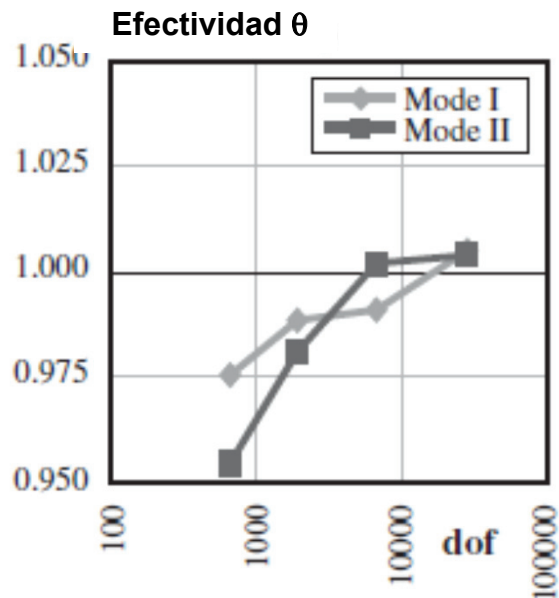
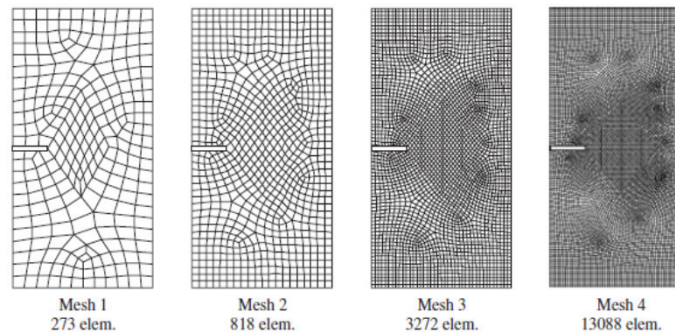
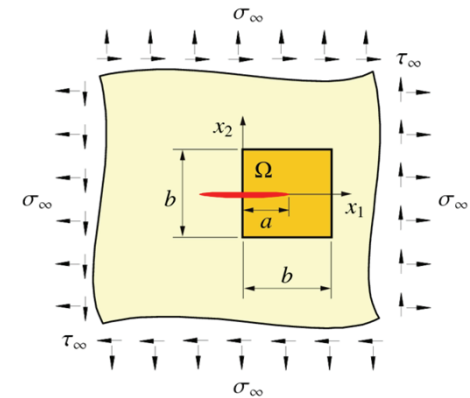
[4] B. Moran B and C.F. Shih. "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance". *EFM 1987*; **7**:615-642

4. Estimación de error en problemas singulares

4.2 Estimación de error

- **Resultados**

- Ejemplo: Placa infinita con grieta en modo mixto

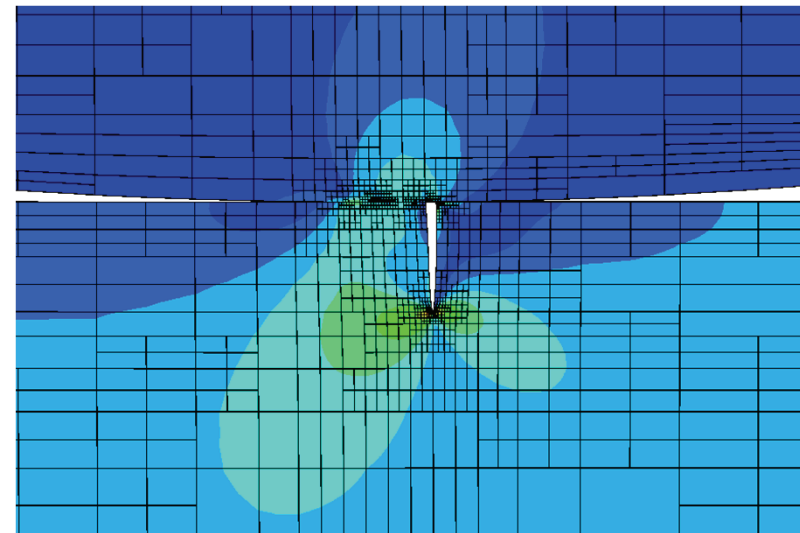
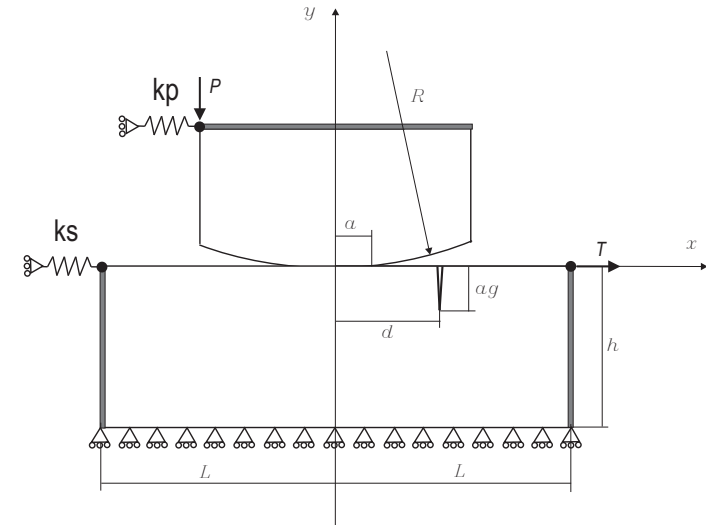
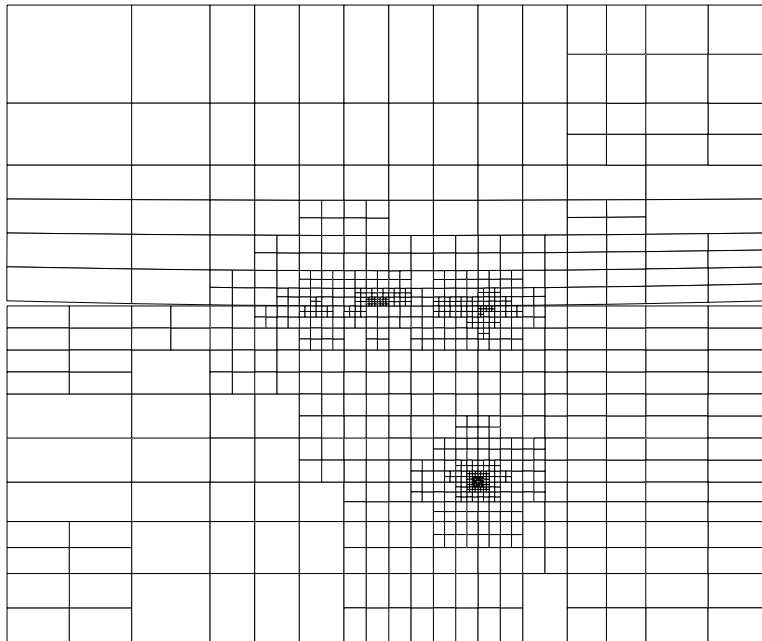


4. Estimación de error en problemas singulares

4.2 Estimación de error

- Simulación ensayo fretting-fatiga (contacto cilíndrico)

Refinamiento h-adaptativo

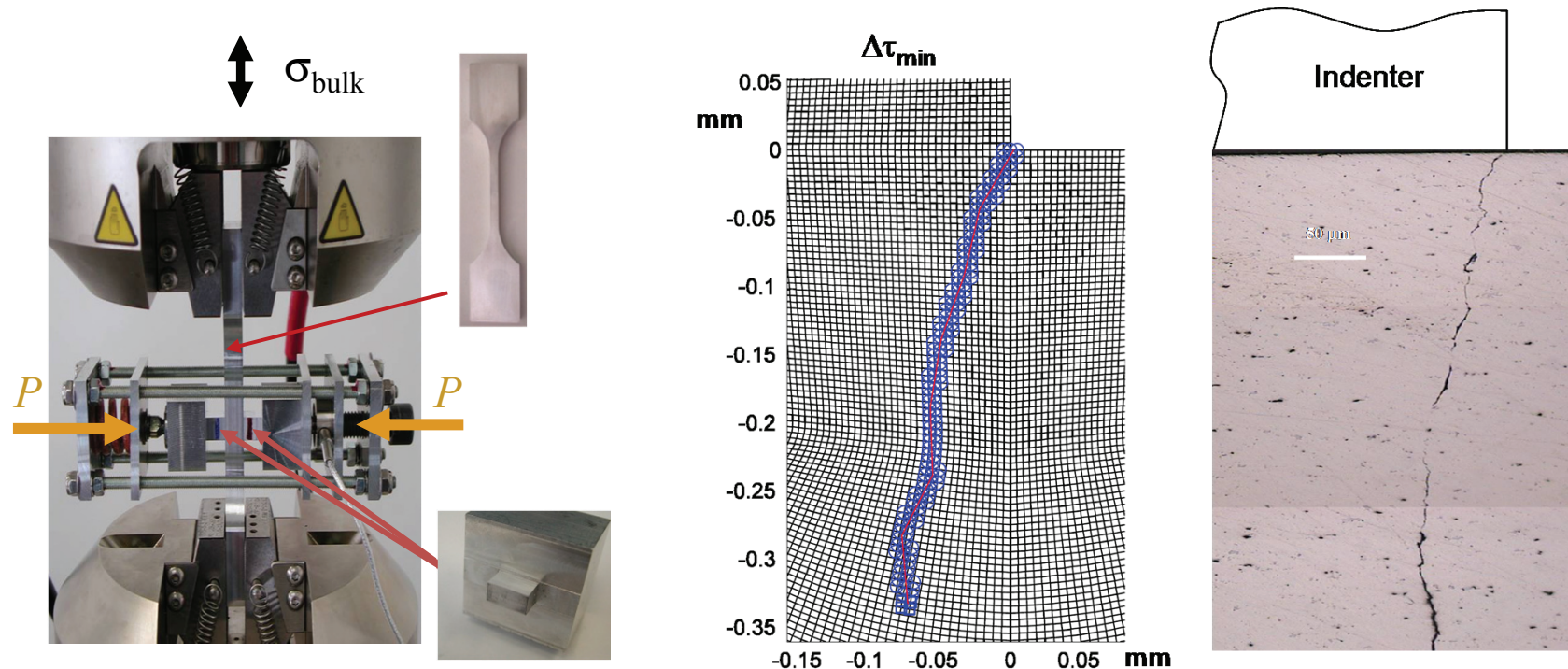


[1] E. Giner, C. Navarro, M. Sabsabi, M. Tur, J. Domínguez, F.J. Fuenmayor, "Fretting fatigue life prediction using the extended finite element method", *IJMS* 2009, **53**: 217-225.

4. Estimación de error en problemas singulares

4.2 Estimación de error

- **Simulación ensayo fretting-fatiga (contacto completo)**
 - Singularidad de esquina en contacto y de extremo grieta [1]
 - Simulación de cierre de grieta [2]



[1] E. Giner, M. Tur, and F.J. Fuenmayor, "A domain integral for the calculation of generalized stress intensity factors in sliding complete contacts", *IJSS* 2009, **46**: 938-951.

[2] M. Sabsabi, E. Giner and F.J. Fuenmayor, "Experimental fatigue testing of a fretting complete contact and numerical life correlation using X-FEM", *IJF* 2011, **33**: 811-822

5. Estimación de error en magnitudes de interés

5.1 Planteamiento mediante problema dual

- **Magnitudes de interés:** $Q(\mathbf{u})$

- Desplazamiento medio en Ω_Q

$$Q(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\Omega_Q|} \int_{\Omega_Q} \mathbf{u}^T \boldsymbol{\alpha} \, d\Omega$$

- Tensión media en Ω_Q

$$Q(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\Omega_Q|} \int_{\Omega_Q} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\alpha} \, d\Omega$$

- F.I.T.

$$Q(\mathbf{u}) = K = -\frac{1}{C} \int_{\Omega_Q} \left(\sigma_{jk} u_k^{aux} - \sigma_{jk}^{aux} u_k \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \, d\Omega$$

Vector
extracción
componentes

- **Buscamos:**

- Estimar el error en magnitudes de interés
- Obtener discretizaciones adecuadas a la magnitud

5. Estimación de error en magnitudes de interés

5.1 Planteamiento mediante problema dual

- **Problema primal:**
$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_u^T \boldsymbol{\varepsilon}_v \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v}^T \mathbf{t} \, d\Gamma$$

- **Magnitud de interés de la solución (lineal):** $Q(\mathbf{u})$

- **Problema dual:**
$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_w^T \boldsymbol{\varepsilon}_v \, d\Omega = Q(\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad Q(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_w^T \boldsymbol{\varepsilon}_u \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_w^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_u \, d\Omega$$

- **Error en magnitud de interés:**

$$\Rightarrow E_Q = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_w - \boldsymbol{\sigma}_w^h) \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_u - \boldsymbol{\sigma}_u^h) \, d\Omega$$

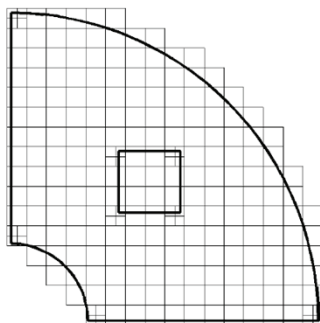
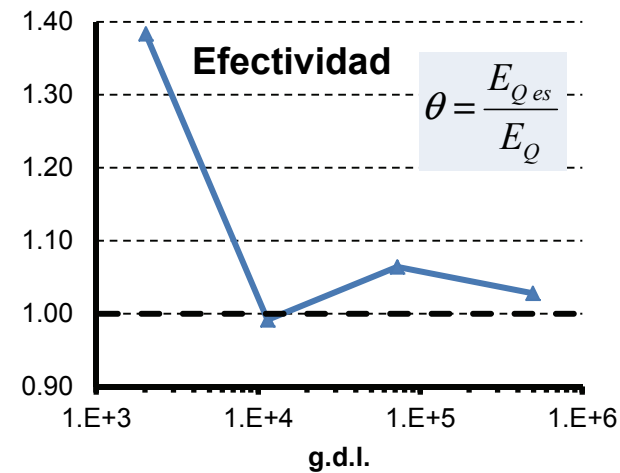
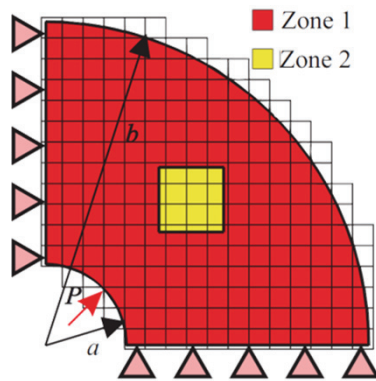
- **Estimador de error basado en recovery de primal y dual**

$$\Rightarrow E_{Qes} = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}_w^* - \boldsymbol{\sigma}_w^h) \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_u^* - \boldsymbol{\sigma}_u^h) \, d\Omega$$

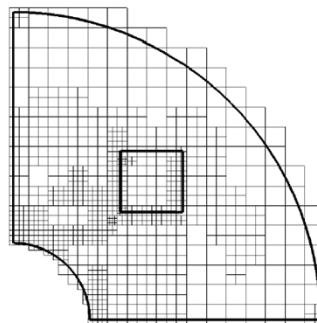
5. Estimación de error en magnitudes de interés

5.1 Estimación de error

- Cilindro sometido a presión interna
- Magnitud: tensión media σ_x en dominio de interés



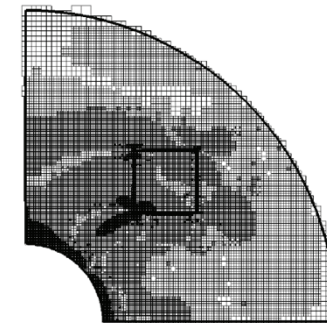
a) Mesh 1



b) Mesh 2



c) Mesh 3



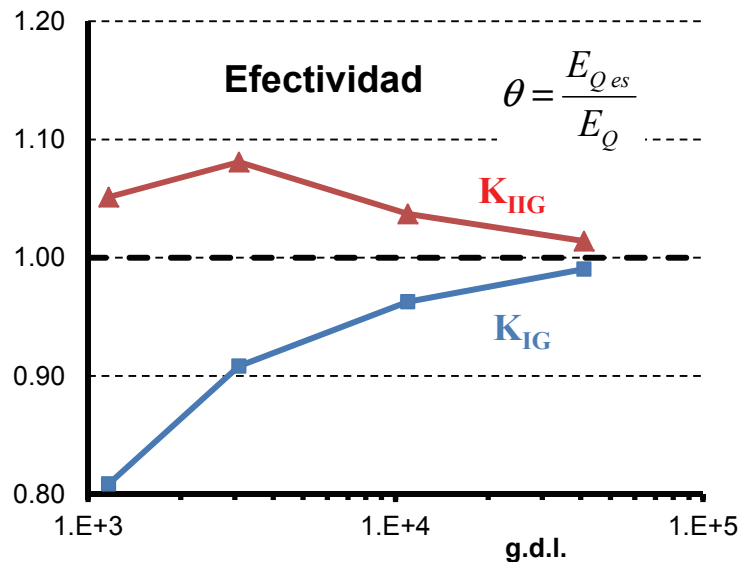
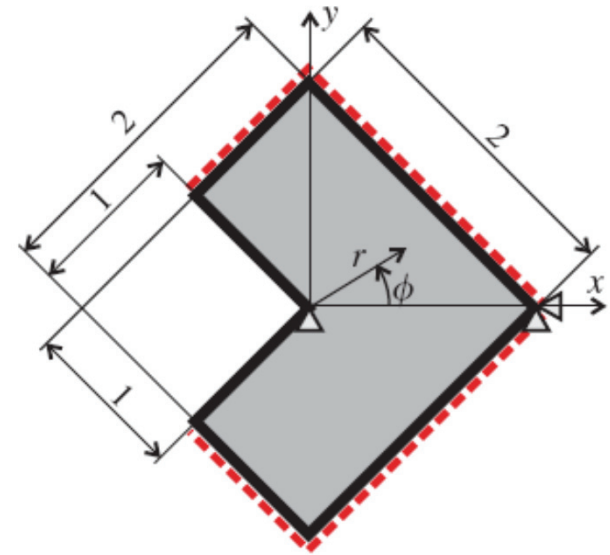
d) Mesh 4

5. Estimación de error en magnitudes de interés

5.1 Estimación de error

- Problema singular
- Magnitudes : FIT generalizados (K_{IG} , K_{IIG})

$$Q(\mathbf{u}) = K_G = -\frac{1}{C} \int_{\Omega^*} (\sigma_{jk} u_k^{aux} - \sigma_{jk}^{aux} u_k) \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Omega$$



gdl	K_{IG}		K_{IIG}	
	θ_{Qol}	θ	θ_{Qol}	θ
1167	0,9939600	0,8086917	1,0000957	1,05122580
3097	0,9995515	0,9082397	1,0000358	1,08094500
10959	0,9999716	0,9627274	1,0000042	1,03711201
41007	0,9999984	0,9903965	1,0000004	1,01401490

$$\theta_{Qol} = \frac{Q(\mathbf{u}_h) + Q(\mathbf{e}_{es})}{Q(\mathbf{u})}$$





Congreso Nacional de ingeniería Mecánica, Castellón 2012

**Estimación de error
en elementos finitos
mediante técnicas de 'recovery'**

Javier Fuenmayor

Juan José Ródenas

Eugenio Giner

José Enrique Tarancón

Manuel Tur

José Albelda

Francisco D. Denia

Luis M. Baeza

Ana Vercher

**Dpto. Ingeniería Mecánica y de Materiales
Universitat Politècnica de València**

